注意:
因以下项目填写不清而影响成绩责任自负
准考证号

姓名

考试地点________

________考场______号

归属区县________

(领准考证的区县)

(密 封 线 内 不 要 答 题)

绝密★启用前

新浪教育联合跨考教育合办第二届 “十万人大联考”数学(二)试卷

(科目代码:302)

考试时间:上午 8:30—11:30

考生注意事项

1. 答题前,考生须在答题纸指定位置上填写考生姓名、报考单位和考生编号。
2. 答案必须写在答题纸指定位置上,写在其他地方无效。
3. 填(书)写必须使用蓝(黑)色字迹钢笔、圆珠笔或签字笔。
4. 考试结束,将答题纸和试题一并装入试题袋中交回。

本卷得分

题型	选择题	填空题	解答题	总计
总分	32	24	94	150
得分	______分	______分	______分	______分

一、选择题:1～8 小题,每小题 4 分,共 32 分. 下列每题给出的四个选项中,只有一个选项符合题目要求. 请将所选选项前的字母填在答题纸指定位置上.

(1)设 $f(x)$在 $x=0$ 的某邻域内连续,且当 $x\to0$ 时,$f(x)$与 x^m 为同阶无穷小. 又设 $x\to0$ 时,$F(x)=\int_0^{x^n} f(t)\mathrm{d}t$ 与 x^k 为同阶无穷小,其中 m 与 n 为正整数. 则 $k=$ ( )

(A)$mn+n$. (B)$2n+m$.

(C)$m+n$. (D)$mn+n-1$.

(2)$\int_{-1}^{1}\left(\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{x+\mathrm{e}^{nx}}{1+\mathrm{e}^{nx}}\right)\mathrm{d}x=$ ( )

(A)0. (B)$\frac{1}{2}$. (C)1. (D)$\frac{3}{2}$.

(3)下述论断正确的是 ( )

(A)设 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上有定义,除 $x=0$ 外均可导,且 $f'(x)>0$,则 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上严格单调增加.

(B)设 $f(x)$为偶函数且 $x=0$ 是 $f(x)$的极值点,则 $f'(0)=0$.

(C)设 $f(x)$在 $x=x_0$ 处存在二阶导数,且 $f''(x_0)>0$,则 $x=x_0$ 是 $f(x)$的极小值.

(D)设 $f(x)$在 $x=x_0$ 处连续但不可导,并设 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{x-x_0}=a$,$a>0$,则 $f(x_0)$是 $f(x)$的极小值.

(4)设 $f(x)$在 $x=0$ 处存在 2 阶导数,且 $f(0)=0$,$f'(0)=0$,$f''(0)\neq0$. 则

$$\lim_{x\to0}\frac{\int_0^x tf(x-t)\mathrm{d}t}{x\int_0^x f(x-t)\mathrm{d}t}=$$ ( )

(A)$\frac{1}{2}$. (B)$\frac{1}{3}$. (C)$\frac{1}{4}$. (D)$\frac{1}{5}$.

(5)设 $f(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^x, & x\geqslant0,\\ x, & x<0.\end{cases}$ $g(x)=\begin{cases}x\sin\frac{1}{x}, & x\neq0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$

下述命题成立的是 ( )

(A)$f(x)$在$[-1,1]$上存在原函数.

(B)存在 $g'(0)$.

(C)$g(x)$在$[-1,1]$上存在原函数.

(D)$F(x)=\int_{-1}^{x} f(t)\mathrm{d}t$ 在 $x=0$ 处可导.

(6)设 $F(u,v)$ 具有一阶连续偏导数,且 $z=z(x,y)$ 由方程 $F\left(\dfrac{x}{z},yz\right)=0$ 所确定. 又设题中出现的分母不为零,则 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}-y\dfrac{\partial z}{\partial y}=$ ( )

(A)0. (B)z. (C)$\dfrac{1}{z}$. (D)1.

(7)设 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶非零矩阵,满足 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$,且 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{E}$,则必有 ( )

(A)$r(\boldsymbol{A})=1$.

(B)$r(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=2$.

(C)$[r(\boldsymbol{A})-1][r(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})-2]=0$.

(D)$[r(\boldsymbol{A})-1][r(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})-1]=0$.

(8)设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是 n 阶可逆阵,且 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$,则

①$\boldsymbol{A}^{-1}\sim\boldsymbol{B}^{-1}$. ②$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\sim\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$. ③$\boldsymbol{A}^{*}\sim\boldsymbol{B}^{*}$. ④$\boldsymbol{AB}\sim\boldsymbol{BA}$.

其中正确的项数是 ( )

(A)1. (B)2. (C)3. (D)4.

二、填空题:9~14 小题,每小题 4 分,共 24 分. 请将答案写在答题纸指定位置上.

(9)$\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{2-\sin x-\cos x}{1+x}\right)^{\frac{1}{\tan x}}=$________.

(10)设 $f(t)$ 为连续函数,且 $\int_0^x tf(2x-t)\mathrm{d}t=\dfrac{1}{2}\ln(1+x^2)$,$f(1)=1$,则 $\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x=$________.

(11)$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1+2x)^{\frac{1}{x^2}}}{\mathrm{e}^{\frac{2}{x}}}=$________.

(12)微分方程 $y'+\dfrac{1}{x}=x\mathrm{e}^{-y}$ 的通解是 $y=$________.

(13)设 $y=y(x)$ 是由方程 $x^2+y=\tan(x-y)$ 确定的函数,且满足 $y(0)=0$. 则 $y''(0)=$________.

(14)设 $\boldsymbol{\xi}_1=[1,3,-2]^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\xi}_2=[2,-1,3]^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系,$\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 和 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 是同解方程组,$\boldsymbol{\eta}=[2,a,b]^{\mathrm{T}}$ 是方程组 $\begin{cases}\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0},\\ x_1+2x_2+x_3=-2\end{cases}$ 的解,则 $\boldsymbol{\eta}=$________.

三、解答题:15~23 小题,共 94 分. 请将解答写在答题纸指定位置上,解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15)(本题满分 10 分)

设 $0<x<1$,$f(x)=\int_0^{+\infty} x^{t^2}\mathrm{d}t$.

(Ⅰ)试用初等函数表示 $f(x)$;

(Ⅱ)设 $\lim\limits_{x\to1^-}(1-x)^p\int_0^{+\infty} x^{t^2}\mathrm{d}t$ 存在且不为零,求常数 p 的值及上述极限.

(16)(本题满分 10 分)

设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有界,且存在二阶导数. 试证明:至少存在一点 $\xi\in(-\infty,+\infty)$ 使 $f''(\xi)=0$.

密封线内不要答题

密封线内不要答题

(17)(本题满分 10 分)

设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导,且满足 $f(1)=4\int_0^{\frac{1}{4}} x^3 f(x)\,\mathrm{d}x$. 试证明:存在 $\xi\in(0,1)$,使 $f'(\xi)=-\dfrac{3f(\xi)}{\xi}$.

(18)(本题满分 10 分)

适当选取函数 $\varphi(x)$,作变量代换 $y=\varphi(x)u$,将 y 关于 x 的微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}+x\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\left(\dfrac{1}{4}x^2+\dfrac{1}{2}\right)y=0$ 化为 u 关于 x 的二阶常系数线性齐次微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}x^2}+\lambda u=0$. 求 $\varphi(x)$ 及 λ,并求原方程的通解.

(19)(本题满分 10 分)

设 $f(x,y)=\max\{\sqrt{x^2+y^2},1\}$, $D=\{(x,y)\mid |x|\leqslant y\leqslant 1\}$. 求 $\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$.

(20)(本题满分 11 分)

求由方程 $2x^2+2y^2+z^2+8xz-z+8=0$ 所确定的函数 $z(x,y)$ 的极值.

(21)(本题满分 11 分)

(Ⅰ)设圆盘的半径为 R,厚为 h.点密度为该点到与圆盘垂直的圆盘中心轴的距离平方,求该圆盘的质量 m.

(Ⅱ)将以曲线 $y=\sqrt{x}$,$x=1$,$x=4$ 及 x 轴围成的曲边梯形绕 x 轴旋转一周生成的旋转体记为 V,设 V 的点密度为该点到旋转轴的距离的平方,求该物体的质量 M.

(22)(本题满分 11 分)

已知 $\boldsymbol{\eta}$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的一个特解,$\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_{n-r}$是对应齐次方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系,证明:

(Ⅰ)$\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\eta}+\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\eta}+\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}+\boldsymbol{\xi}_{n-r}$是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的 $n-r+1$ 个线性无关解;

(Ⅱ)方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的任一解均可由 $\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\eta}+\boldsymbol{\xi}_1,\cdots,\boldsymbol{\eta}+\boldsymbol{\xi}_{n-r}$线性表出.

(23)(本题满分 11 分)

设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&1&0\\1&2&0\\0&1&t\end{bmatrix}$,$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&2&-1\\2&1&2\\3&3&1\end{bmatrix}$,$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}2&3&-1\\0&2&0\\-1&3&2\end{bmatrix}$.

(Ⅰ)t 为何值时,矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 等价?说明理由.

(Ⅱ)t 为何值时,矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{C}$ 相似?说明理由.

密封线内不要答题