新浪教育联合跨考教育合办第二届
“十万人大联考”数学(二)试卷(答案)

一、选择题

(1)**【答案】** (A)

【分析】 当 $x\to 0$ 时,$f(x)$ 与 x^m 为同阶无穷小,从而知存在常数 $A\neq 0$,当 $x\to 0$ 时,$f(x)\sim Ax^m$,从而$f(x^n)\sim Ax^{nm}$. 于是

$$\lim_{x\to 0}\frac{F(x)}{x^k}\xlongequal{\text{洛必达法则}}\lim_{x\to 0}\frac{f(x^n)\cdot nx^{n-1}}{kx^{k-1}}=\frac{An}{k}\lim_{x\to 0}\frac{x^{nm}x^n}{x^k}.$$

由题意,上式为不等于零的常数,故 $k=nm+n$.

(2)**【答案】** (B)

【分析】 设 $f(x)=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{x+e^{nx}}{1+e^{nx}}$. 由于当 $x<0$ 时,$\lim\limits_{n\to+\infty}e^{nx}=0$,从而 $f(x)=x$;当 $x=0$ 时,$f(x)=\dfrac{1}{2}$;当 $x>0$ 时,

$$f(x)=\lim_{n\to+\infty}\frac{x+e^{nx}}{1+e^{nx}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{xe^{-nx}+1}{e^{-nx}+1}=1.$$

所以$\int_{-1}^{1}f(x)\mathrm{d}x=\int_{-1}^{0}x\mathrm{d}x+\int_{0}^{1}\mathrm{d}x=-\dfrac{1}{2}+1=\dfrac{1}{2}$. 故应选(B).

(3)**【答案】** (D)

【分析】 由 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{x-x_0}=a$,$a>0$,于是知存在 $x=x_0$ 的某去心邻域 $\mathring{U}$,当 $x\in\mathring{U}$ 且 $x<x_0$ 时,$f'(x)<0$;当 $x\in\mathring{U}$ 且 $x>x_0$ 时,$f'(x)>0$,故知 $f(x_0)$为极小值,故应选(D).

(A)不正确. 例如 $f(x)=\begin{cases}x, & x\leqslant 0,\\ x-1, & x>0\end{cases}$ 符合(A)的一切条件,但 $f\left(-\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{1}{2}$,$f\left(\dfrac{1}{3}\right)=-\dfrac{2}{3}$,$f\left(-\dfrac{1}{2}\right)>f\left(\dfrac{1}{3}\right)$不成立.

(B)不正确,因未设 $f'(0)$存在. 例如 $f(x)=|x|$,$f(0)$是极小值,但 $f'(0)$不存在.

(C)不正确,因未设 $f'(x_0)=0$. 例如 $f(x)=e^x$,处处 $f''(x)=e^x>0$,但无极小值.

(4)**【答案】** (C)

【分析】 先作积分变量代换,令 $x-t=u$,则

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x tf(x-t)\mathrm{d}t}{x\int_0^x f(x-t)\mathrm{d}t}=\lim_{x\to 0}\frac{\int_x^0(x-u)f(u)(-\mathrm{d}u)}{x\int_x^0 f(u)(-\mathrm{d}u)}=\lim_{x\to 0}\frac{x\int_0^x f(u)\mathrm{d}u-\int_0^x uf(u)\mathrm{d}u}{x\int_0^x f(u)\mathrm{d}u}$$

$$\xlongequal{\text{洛必达法则}}\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(u)\mathrm{d}u}{\int_0^x f(u)\mathrm{d}u+xf(x)}\xlongequal{\text{洛必达法则}}\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{f(x)+f(x)+xf'(x)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{f(x)}{x^2}}{\dfrac{2f(x)}{x^2}+\dfrac{f'(x)}{x}}.$$

由二阶导数定义,

$$\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x-0}=f''(0),$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}\xlongequal{\text{洛必达法则}}\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{2x}=\frac{1}{2}f''(0),$$

所以
$$原式=\frac{\frac{1}{2}f''(0)}{f''(0)+f''(0)}=\frac{1}{4}.$$

(5)**【答案】** (C)

【分析】 $g(x)$在$[-1,1]$上连续,故存在原函数.

(A)不正确.$f(x)$在点$x=0$处具有跳跃间断点.函数在某点具有跳跃间断点,那么在包含此点的区间上,该函数必不存在原函数.

(B)不正确.按定义容易知道$g'(0)$不存在.

(D)不正确.可以具体计算出$F(x)$,容易看出$F'_-(0)=0,F'_+(0)=1$,故$F'(0)$不存在.

(6)**【答案】** (B)

【分析】
$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}=-\frac{F'_1\cdot\frac{1}{z}}{F'_1\cdot\left(-\frac{x}{z^2}\right)+F'_2\cdot y},$$
$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}=-\frac{F'_2\cdot z}{F'_1\cdot\left(-\frac{x}{z^2}\right)+F'_2\cdot y},$$
$$x\frac{\partial z}{\partial x}-y\frac{\partial z}{\partial y}=z.$$

(7)**【答案】** (D)

【分析】 $\boldsymbol{A}$是三阶非零阵,则$\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O},r(\boldsymbol{A})\geqslant1$.
$$\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{E},\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}\neq\boldsymbol{O},r(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\geqslant1,$$
因$\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$,即$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=\boldsymbol{O}$,得$r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\leqslant3$,且
$$1\leqslant r(\boldsymbol{A})\leqslant2,1\leqslant r(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\leqslant2.$$
故矩阵$\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}$的秩$r(\boldsymbol{A})$和$r(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})$或者都是1,或者一个是1,另一个是2.(不会是3,也不会是0,也不可能两个都是2.故两个中至少有一个的秩为1)

故(A),(B),(C)均是错误的,故应选(D).

(8)**【答案】** (D)

【分析】 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$,有$|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|$,且存在可逆阵$\boldsymbol{P}$,使
$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B},\tag{$*$}$$
($*$)式两边求逆得
$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}^{-1},\tag{$**$}$$
从而$\boldsymbol{A}^{-1}\sim\boldsymbol{B}^{-1}$(①成立).

($*$)式两边转置,得$\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{P}^{-1})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$,记$(\boldsymbol{P}^{-1})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{Q},\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{Q}^{-1}$,

即$\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$,从而$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\sim\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$(②成立).

($**$)式两边乘$|\boldsymbol{A}|$,$\boldsymbol{P}^{-1}|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{P}=|\boldsymbol{B}|\boldsymbol{B}^{-1}=\boldsymbol{B}^*$,从而$\boldsymbol{A}^*\sim\boldsymbol{B}^*$(③成立).

因$\boldsymbol{A}$可逆,故$\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{EBA}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{ABA}=\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{A}$,即$\boldsymbol{AB}\sim\boldsymbol{BA}$(④成立).

故应选(D).

二、填空题

(9)**【答案】** e^{-2}

【分析】
$$\lim_{x\to0}\left(\frac{2-\sin x-\cos x}{1+x}\right)^{\frac{1}{\tan x}}=\lim_{x\to0}\exp\left\{\frac{1}{\tan x}\ln\left(\frac{2-\sin x-\cos x}{1+x}\right)\right\},$$
而
$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{1}{\tan x}\ln\left(\frac{2-\sin x-\cos x}{1+x}\right)&=\lim_{x\to0}\frac{1}{\tan x}\ln\left(1+\frac{1-\cos x-\sin x-x}{1+x}\right)\\&=\lim_{x\to0}\frac{1}{\tan x}\left(\frac{1-\cos x-\sin x-x}{1+x}\right)=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x-\sin x-x}{x+x^2}\\&\xlongequal{洛必达法则}\lim_{x\to0}\frac{\sin x-\cos x-1}{1+2x}=-2,\end{aligned}$$
所以原式$=\mathrm{e}^{-2}$.

(10)【答案】 $\frac{3}{4}$

【解】 作积分变量变换,令 $2x-t=u$,即 $t=2x-u$,原式化为

$$\int_{2x}^{x}(2x-u)f(u)(-\mathrm{d}u)=\frac{1}{2}\ln(1+x^2),$$

即

$$2x\int_{x}^{2x}f(u)\mathrm{d}u-\int_{x}^{2x}uf(u)\mathrm{d}u=\frac{1}{2}\ln(1+x^2).$$

两边对 x 求导,得

$$2\int_{x}^{2x}f(u)\mathrm{d}u+2x[2f(2x)-f(x)]-[2xf(2x)\cdot 2-xf(x)]=\frac{x}{1+x^2},$$

即

$$2\int_{x}^{2x}f(u)\mathrm{d}u-xf(x)=\frac{x}{1+x^2}.$$

令 $x=1$,得 $2\int_{1}^{2}f(u)\mathrm{d}u=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2},\int_{1}^{2}f(x)\mathrm{d}x=\frac{3}{4}.$

(11)【答案】 e^{-2}

【分析】

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+2x)^{\frac{1}{x^2}}}{\mathrm{e}^{\frac{2}{x}}}=\lim_{x\to 0}\mathrm{e}^{\frac{1}{x^2}\ln(1+2x)-\frac{2}{x}},$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}\ln(1+2x)-\frac{2}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+2x)-2x}{x^2}$$

$$\xlongequal{\text{洛必达法则}}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2}{1+2x}-2}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{-4x}{1+2x}}{2x}=-2.$$

所以原式 $=\mathrm{e}^{-2}$.

(12)【答案】 $y=\ln\left[\frac{1}{x}\left(\frac{1}{3}x^3+C\right)\right]$

【分析】 将 $y'+\frac{1}{x}=x\mathrm{e}^{-y}$,化为 $\mathrm{e}^{y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\frac{1}{x}\mathrm{e}^{y}=x$,

即 $\frac{\mathrm{d}\mathrm{e}^{y}}{\mathrm{d}x}+\frac{1}{x}\mathrm{e}^{y}=x$, $\mathrm{e}^{y}=\mathrm{e}^{-\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x}\left(\int x\mathrm{e}^{\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x}+C\right)=\frac{1}{|x|}\left(\int x|x|\mathrm{d}x+C\right).$

当 $x>0$ 时,$\mathrm{e}^{y}=\frac{1}{x}\left(\int x^2\mathrm{d}x+C\right)=\frac{1}{x}\left(\frac{1}{3}x^3+C\right)$;

当 $x<0$ 时,$\mathrm{e}^{y}=-\frac{1}{x}\left(-\int x^2\mathrm{d}x+C\right)=-\frac{1}{x}\left(-\frac{1}{3}x^3+C\right).$

合并可写成 $\mathrm{e}^{y}=\frac{1}{x}\left(\frac{1}{3}x^3+C\right)$,即 $y=\ln\left[\frac{1}{x}\left(\frac{1}{3}x^3+C\right)\right].$

(13)【答案】 -1

【分析】 $2x+y'=\sec^2(x-y)\cdot(1-y')$,以 $x=0,y=0$ 代入,得

$$y'(0)=1-y'(0),\quad \text{所以 } y'(0)=\frac{1}{2}.$$

再求,$2+y''=2\sec(x-y)\sec(x-y)\tan(x-y)\cdot(1-y')^2+\sec^2(x-y)\cdot(-y'')$,以 $x=0,y=0$ 代入,

$$2+y''(0)=-y''(0),\text{所以 } y''(0)=-1.$$

(14)【答案】 $[2,-6,8]^{\mathrm{T}}$

【分析】 因 $\boldsymbol{\eta}$ 是 $\begin{cases}\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0},\\ x_1+2x_2+x_3=-2\end{cases}$ 的解,故 $\boldsymbol{\eta}$ 应满足 $x_1+2x_2+x_3=-2$,代入 $\boldsymbol{\eta}$ 得 $2+2a+b=-2,2a+b=-4$,得 $\boldsymbol{\eta}=[2,a,-2a-4]^{\mathrm{T}}$.

又 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 和 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 是同解方程组. $\boldsymbol{\eta}$ 满足 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$,即满足 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$,$\boldsymbol{\eta}$ 应可由 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系线性表出,即方程组 $x_1\boldsymbol{\xi}_1+x_2\boldsymbol{\xi}_2=\boldsymbol{\eta}$ 有解.

$$[\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2\,\vdots\,\boldsymbol{\eta}]=\left[\begin{array}{cc:c}1&2&2\\3&-1&a\\-2&3&-2a-4\end{array}\right]\to\begin{bmatrix}1&2&2\\0&-7&a-6\\0&7&-2a\end{bmatrix}\to\left[\begin{array}{cc:c}1&2&2\\0&-7&a-6\\0&0&-a-6\end{array}\right],$$

由 $r(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2)=r(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\eta})=2$，得 $a=-6$，故 $\boldsymbol{\eta}=[2,-6,8]^{\mathrm{T}}$.

三、解答题

(15)【解】 (Ⅰ) $f(x)=\int_0^{+\infty} x^{t^2}\,\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{t^2\ln x}\,\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2\ln\frac{1}{x}}\,\mathrm{d}t.$

作积分变量变换，令 $t\sqrt{\ln\frac{1}{x}}=u$，从而 $\sqrt{\ln\frac{1}{x}}\,\mathrm{d}t=\mathrm{d}u$，于是

$$f(x)=\frac{\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u}{\sqrt{\ln\frac{1}{x}}}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\ln\frac{1}{x}}},\ 0<x<1.$$

(Ⅱ) $\lim\limits_{x\to1^-}(1-x)^p\int_0^{+\infty}x^{t^2}\,\mathrm{d}t\xlongequal{1-x=y}\lim\limits_{y\to0^+}\frac{y^p}{\sqrt{-\ln(1-y)}}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}\xlongequal{等}\frac{\sqrt{\pi}}{2}\lim\limits_{y\to0^+}\frac{y^p}{y^{\frac{1}{2}}}$，

其中“等”表示用了等价无穷小替换. 欲使上述极限存在且不为零，其充要条件是 $p=\frac{1}{2}$，此时，该极限值等于 $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

(16)【证】 用反证法，设对一切 $x\in(-\infty,+\infty)$，$f''(x)\neq0$，则要么对一切 $x\in(-\infty,+\infty)$，$f''(x)>0$，或者对一切 $x\in(-\infty,+\infty)$，$f''(x)<0$. 不妨设对一切 $x\in(-\infty,+\infty)$，$f''(x)>0$. 有以下两种解法：

法一 取 x_1 使 $f'(x_1)\neq0$. 这种 x_1 总存在的，因若不存在，则 $f'(x)\equiv0$，从而与反证法的前提矛盾，取好 x_1 之后，将 $f(x)$ 在 $x=x_1$ 处按泰勒公式展开至 $n=1$，有

$$f(x)=f(x_1)+f'(x_1)(x-x_1)+\frac{1}{2}f''(\eta)(x-x_1)^2>f(x_1)+f'(x_1)(x-x_1).$$

若 $f'(x_1)>0$，令上式中的 $x\to+\infty$；若 $f'(x_1)<0$，令上式中的 $x\to-\infty$，总有 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$，与 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有界矛盾. 此矛盾证明了反证法的前提有错，故知存在 $\xi\in(-\infty,+\infty)$ 使 $f''(\xi)=0$.

法二 由对一切 $x\in(-\infty,+\infty)$，$f''(x)>0$，故知对一切 x，$f'(x)$ 严格单调增加. 取 x_1 使 $f'(x_1)>0$（若不然，取 x_1 使 $f'(x_1)<0$），由拉格朗日中值定理，当 $x>x_1$ 时，有

$$f(x)=f(x_1)+f'(\eta)(x-x_1)>f(x_1)+f'(x_1)(x-x_1),$$

令 $x\to+\infty$，得 $f(x)\to+\infty$，与 $f(x)$ 有界矛盾. 若 $f'(x_1)<0$，则当 $x<x_1$ 时，有

$$f(x)=f(x_1)+f'(\eta)(x-x_1)>f(x_1)+f'(x_1)(x-x_1),$$

令 $x\to-\infty$，得 $f(x)\to+\infty$，与 $f(x)$ 有界矛盾. 此矛盾证明了反证法的前提有错，

故知存在 $\xi\in(-\infty,+\infty)$，使 $f''(\xi)=0$.

(17)【证】 由积分中值定理，存在 $\eta\in\left[0,\frac{1}{4}\right]$，使得 $4\int_0^{\frac{1}{4}}x^3f(x)\,\mathrm{d}x=\eta^3f(\eta)$.

令 $F(x)=x^3f(x)$，因为 $f(1)-4\int_0^{\frac{1}{4}}x^3f(x)\,\mathrm{d}x=0$，

故有 $f(1)=\eta^3f(\eta)$，即 $F(1)=F(\eta)$.

显然 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导，由中值定理得，存在 $\xi\in(\eta,1)$，使得 $F'(\xi)=0$，即

$$3\xi^2f(\xi)+\xi^3f'(\xi)=0,$$

即 $f'(\xi)=-\frac{3f(\xi)}{\xi}$.

显然 $\xi\in(0,1)$，故命题得证.

(18)【解】 由 $y=\varphi(x)u$，有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\varphi'(x)u+\varphi(x)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x},\ \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\varphi''(x)u+2\varphi'(x)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+\varphi(x)\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2},$$

代入原方程，得

$$\varphi(x)\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2}+[2\varphi'(x)+x\varphi(x)]\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+\left[\varphi''(x)+x\varphi'(x)+\frac{1}{4}x^2\varphi(x)+\frac{1}{2}\varphi(x)\right]u=0.$$

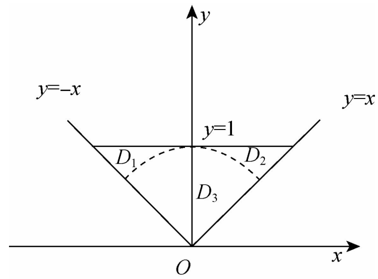
取 $\varphi(x)$ 使 $2\varphi'(x)+x\varphi(x)=0$. 解微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}\varphi(x)}{\varphi(x)}=-\dfrac{x}{2}\mathrm{d}x$, 取 $\varphi(x)=\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4}}$. 经计算可知

$$\lambda=\varphi''(x)+x\varphi'(x)+\frac{1}{4}x^2\varphi(x)+\frac{1}{2}\varphi(x)=0.$$

于是原方程经变换 $y=\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4}}u$ 之后, 原方程化为 $\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4}}\dfrac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2}=0$,

即 $\dfrac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2}=0$.

解之得 $u=C_1+C_2x$, 原方程的通解为 $(C_1+C_2x)\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4}}$.



(19)**【解】** 如图所示, 将 D 分成三块, 中间一块记为 D_3, 左、右两块分别记为 D_1 与 D_2, 则

$$f(x,y)=\max\{\sqrt{x^2+y^2},1\}=\begin{cases}\sqrt{x^2+y^2}, & (x,y)\in D_1\cup D_2,\\ 1, & (x,y)\in D_3.\end{cases}$$

$$\begin{aligned}\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma &= \iint_{D_1\cup D_2}\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}\sigma+\iint_{D_3}\mathrm{d}\sigma\\ &=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_1^{\frac{1}{\sin\theta}}r^2\mathrm{d}r+\frac{\pi}{4}\\ &=\frac{1}{3}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}(\csc^3\theta-1)\mathrm{d}\theta+\frac{\pi}{4}\\ &=\frac{1}{3}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\csc^3\theta\mathrm{d}\theta+\frac{\pi}{12}.\end{aligned}$$

而
$$\begin{aligned}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\csc^3\theta\mathrm{d}\theta &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\csc\theta\csc^2\theta\mathrm{d}\theta\\ &=-\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\csc\theta\mathrm{d}\cot\theta=-\left(\csc\theta\cot\theta\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\cot^2\theta\csc\theta\mathrm{d}\theta\right)\\ &=-\left[-\sqrt{2}-\sqrt{2}+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}(\csc^2\theta-1)\csc\theta\mathrm{d}\theta\right],\end{aligned}$$

所以
$$\begin{aligned}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\csc^3\theta\mathrm{d}\theta &= \sqrt{2}+\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\csc\theta\mathrm{d}\theta=\sqrt{2}+\frac{1}{2}\Big[\ln|\csc\theta-\cot\theta|\Big]\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\\ &=\sqrt{2}+\frac{1}{2}[\ln(\sqrt{2}+1)-\ln(\sqrt{2}-1)]=\sqrt{2}+\ln(\sqrt{2}+1).\end{aligned}$$

$$原式=\frac{\sqrt{2}}{3}+\frac{1}{3}\ln(\sqrt{2}+1)+\frac{\pi}{12}.$$

(20)**【解】** 令 $F(x,y)=2x^2+2y^2+z^2+8xz-z+8$, 且令

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F'_x}{F'_z}=-\frac{4x+8z}{2z+8x-1}=0,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F'_y}{F'_z}=-\frac{4y}{2z+8x-1}=0,$$

解得 $y=0$, $4x+8z=0$, 再与 $2x^2+2y^2+z^2+8xz-z+8=0$ 联立, 解得两组解为

$$(x,y,z)_1=(-2,0,1);(x,y,z)_2=\left(\frac{16}{7},0,-\frac{8}{7}\right).$$

再求二阶偏导数并以两组解分别代入, 得

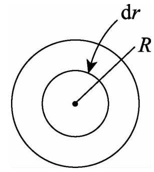
$$\frac{\partial^2z}{\partial x^2}\Big|_1=\frac{4}{15},\frac{\partial^2z}{\partial x\partial y}\Big|_1=0,\frac{\partial^2z}{\partial y^2}\Big|_1=\frac{4}{15},$$

$$\frac{\partial^2z}{\partial x^2}\Big|_2=-\frac{4}{15},\frac{\partial^2z}{\partial x\partial y}\Big|_2=0,\frac{\partial^2z}{\partial y^2}\Big|_2=-\frac{4}{15},$$

所以在第一组点处, $B^2-AC<0$, $A=\dfrac{4}{15}>0$, 故 $z=1$ 为极小值; 在第二组点处, $B^2-AC<0$, $A=$

$-\frac{4}{15}<0$,故 $z=-\frac{8}{7}$ 为极大值.

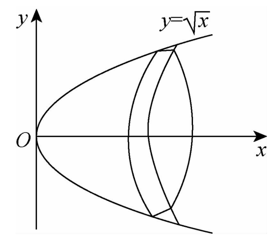
(21)【解】 (Ⅰ)以环细分圆盘,设环的宽度为 $\mathrm{d}r$,内半径为 r,在环上点密度视为不变,为 r^2,于是该环的质量为



$$\mathrm{d}m=r^2\cdot 2\pi r\mathrm{d}r\cdot h.$$

$$m=2\pi h\int_0^R r^3\,\mathrm{d}r=\frac{1}{2}\pi hR^4.$$

(Ⅱ)该旋转体可看成由一个个薄片组成,由(Ⅰ),每一薄片的质量



$$\mathrm{d}M=\frac{1}{2}\pi R^4\,\mathrm{d}x,$$

其中 R 为 x 处的旋转半径,即 y,于是

$$\mathrm{d}M=\frac{1}{2}\pi y^4\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\pi x^2\,\mathrm{d}x.$$

$$M=\frac{1}{2}\pi\int_1^4 x^2\,\mathrm{d}x=\frac{1}{6}\pi(4^3-1)=\frac{63}{6}\pi=\frac{21}{2}\pi.$$

(22)【证】 (Ⅰ)$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\eta}+\boldsymbol{\xi}_i)=\boldsymbol{A\eta}=\boldsymbol{b}$,$i=0,1,2,\cdots,n-r$,(其中 $\boldsymbol{\xi}_0=\boldsymbol{0}$),故 $\boldsymbol{\eta}+\boldsymbol{\xi}_i$,$i=0,1,2,\cdots,n-r$ 均是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$的解向量.

设有数 $k_0,k_1,k_2,\cdots,k_{n-r}$,使得

$$k_0\boldsymbol{\eta}+k_1(\boldsymbol{\eta}+\boldsymbol{\xi}_1)+k_2(\boldsymbol{\eta}+\boldsymbol{\xi}_2)+\cdots+k_{n-r}(\boldsymbol{\eta}+\boldsymbol{\xi}_{n-r})=\boldsymbol{0},\qquad (*)$$

(*)式左乘 $\boldsymbol{A}$,得　$k_0\boldsymbol{A\eta}+k_1\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\eta}+\boldsymbol{\xi}_1)+k_2\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\eta}+\boldsymbol{\xi}_2)+\cdots+k_{n-r}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\eta}+\boldsymbol{\xi}_{n-r})=\boldsymbol{0}$,

整理得　$(k_0+k_1+\cdots+k_{n-r})\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$,其中 $\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$.

故　$$k_0+k_1+\cdots+k_{n-r}=0,\qquad (**)$$

代入(*)式,得　$k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2+\cdots+k_{n-r}\boldsymbol{\xi}_{n-r}=\boldsymbol{0}$.

因 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_{n-r}$是对应齐次方程组的基础解系,线性无关,得 $k_i=0$,$i=1,2,\cdots,n-r$. 代入(**)式,得 $k_0=0$,从而有

$\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\eta}+\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\eta}+\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}+\boldsymbol{\xi}_{n-r}$是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的 $n-r+1$ 个线性无关解向量.

(Ⅱ)设 $\boldsymbol{\eta}^*$ 为 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的任一解,则

$$\boldsymbol{\eta}^*=\boldsymbol{\eta}+\lambda_1\boldsymbol{\xi}_1+\lambda_2\boldsymbol{\xi}_2+\cdots+\lambda_{n-r}\boldsymbol{\xi}_{n-r},$$

且 $\boldsymbol{\eta}^*=\boldsymbol{\eta}+\lambda_1\boldsymbol{\xi}_1+\lambda_2\boldsymbol{\xi}_2+\cdots+\lambda_{n-r}\boldsymbol{\xi}_{n-r}$

$=\boldsymbol{\eta}+\lambda_1(\boldsymbol{\xi}_1+\boldsymbol{\eta}-\boldsymbol{\eta})+\lambda_2(\boldsymbol{\xi}_2+\boldsymbol{\eta}-\boldsymbol{\eta})+\cdots+\lambda_{n-r}(\boldsymbol{\xi}_{n-r}+\boldsymbol{\eta}-\boldsymbol{\eta})$

$=(1-\lambda_1-\lambda_2-\cdots-\lambda_{n-r})\boldsymbol{\eta}+\lambda_1(\boldsymbol{\xi}_1+\boldsymbol{\eta})+\lambda_2(\boldsymbol{\xi}_2+\boldsymbol{\eta})+\cdots+\lambda_{n-r}(\boldsymbol{\xi}_{n-r}+\boldsymbol{\eta})$,

故任一个 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的解 $\boldsymbol{\eta}^*$,均可由向量组 $\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\eta}+\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\eta}+\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}+\boldsymbol{\xi}_{n-r}$线性表出.

(23)【分析】 (Ⅰ)$\boldsymbol{A}\cong\boldsymbol{B}\Leftrightarrow r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B})$.

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&2&-1\\2&1&2\\3&3&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&-1\\0&-3&4\\0&-3&4\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&-1\\0&-3&4\\0&0&0\end{bmatrix},\text{知 } r(\boldsymbol{B})=2.$$

显然,当 $t=0$ 时,有 $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B})=2$,$\boldsymbol{A}\cong\boldsymbol{B}$.

(Ⅱ)　$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{C}|=\begin{vmatrix}\lambda-2&-3&1\\0&\lambda-2&0\\1&-3&\lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-2)[(\lambda-2)^2-1]$$

$$=(\lambda-2)(\lambda-3)(\lambda-1),$$

则 $\boldsymbol{C}$ 有三个不同的特征值 $\lambda_1=1,\lambda_2=2,\lambda_3=3$,且存在可逆阵 $\boldsymbol{P}$,使得

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{CP}=\boldsymbol{\Lambda}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{bmatrix}.$$

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-2&-1&0\\-1&\lambda-2&0\\0&-1&\lambda-t\end{vmatrix}=(\lambda-t)[(\lambda-2)^2-1]$$

$$=(\lambda-t)(\lambda-3)(\lambda-1).$$

当 $t=2$ 时，$\boldsymbol{A}$ 有与 $\boldsymbol{C}$ 一样的三个不同的特征值，故知，当 $t=2$ 时，有

$$\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{\Lambda}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{P}.$$

从而有

$$(\boldsymbol{Q}\boldsymbol{P}^{-1})^{-1}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{Q}\boldsymbol{P}^{-1})=\boldsymbol{C},\text{即 }\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{C}.$$