

注意：  
因以下项目填写不清  
而影响成绩责任自负  
准考证号

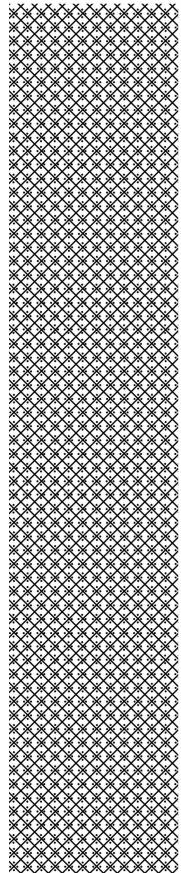
--	--	--	--	--	--	--	--

姓名 

--	--	--

考试地点 \_\_\_\_\_

考场 \_\_\_\_\_ 号  
归属区县 \_\_\_\_\_  
(领准考证的区县)



密封线内不要答题

绝密★启用前

## 新浪教育联合跨考教育合办第二届 “十万人联考”数学(二)试卷

(科目代码:302)

考试时间:上午 8:30—11:30

### 考生注意事项

1. 答题前,考生须在答题纸指定位置上填写考生姓名、报考单位和考生编号。
2. 答案必须写在答题纸指定位置上,写在其他地方无效。
3. 填(书)写必须使用蓝(黑)色字迹钢笔、圆珠笔或签字笔。
4. 考试结束,将答题纸和试题一并装入试题袋中交回。

### 本卷得分

题型	选择题	填空题	解答题	总计
总分	32	24	94	150
得分	_____分	_____分	_____分	_____分

一、选择题:1~8 小题,每小题 4 分,共 32 分. 下列每题给出的四个选项中,只有一个选项符合题目要求. 请将所选选项前的字母填在答题纸指定位置上.

- (1) 设  $f(x)$  在  $x=0$  的某邻域内连续,且当  $x \rightarrow 0$  时,  $f(x)$  与  $x^m$  为同阶无穷小.

又设  $x \rightarrow 0$  时,  $F(x) = \int_0^{x^n} f(t) dt$  与  $x^k$  为同阶无穷小,其中  $m$  与  $n$  为正整数. 则  $k =$  ( )

- (A)  $mn+n$ . (B)  $2n+m$ .  
(C)  $m+n$ . (D)  $mn+n-1$ .

(2)  $\int_{-1}^1 \left( \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x + e^{nx}}{1 + e^{nx}} \right) dx =$  ( )

- (A) 0. (B)  $\frac{1}{2}$ . (C) 1. (D)  $\frac{3}{2}$ .

- (3) 下述论断正确的是 ( )

(A) 设  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  上有定义,除  $x=0$  外均可导,且  $f'(x) > 0$ ,则  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  上严格单调增加.

(B) 设  $f(x)$  为偶函数且  $x=0$  是  $f(x)$  的极值点,则  $f'(0)=0$ .

(C) 设  $f(x)$  在  $x=x_0$  处存在二阶导数,且  $f''(x_0) > 0$ ,则  $x=x_0$  是  $f(x)$  的极小值.

(D) 设  $f(x)$  在  $x=x_0$  处连续但不可导,并设  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{x - x_0} = a$ ,  $a > 0$ ,则  $f(x_0)$  是  $f(x)$  的极小值.

- (4) 设  $f(x)$  在  $x=0$  处存在 2 阶导数,且  $f(0)=0$ ,  $f'(0)=0$ ,  $f''(0) \neq 0$ . 则

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x t f(x-t) dt}{x \int_0^x f(x-t) dt} =$$
 ( )

- (A)  $\frac{1}{2}$ . (B)  $\frac{1}{3}$ . (C)  $\frac{1}{4}$ . (D)  $\frac{1}{5}$ .

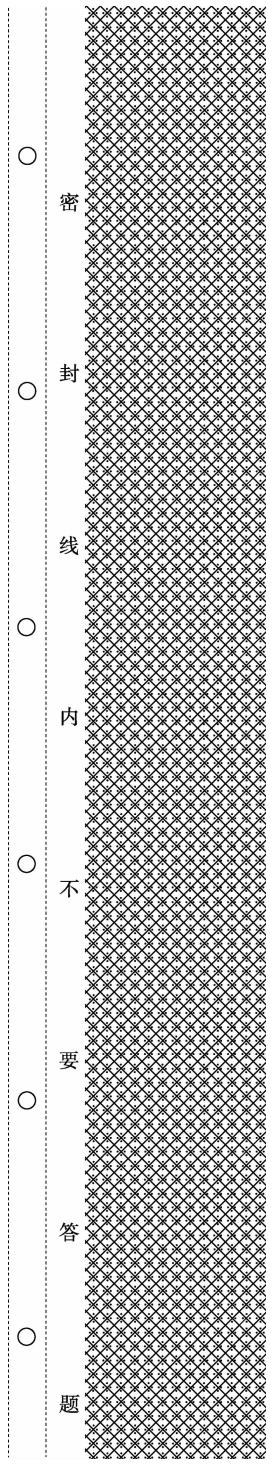
(5) 设  $f(x) = \begin{cases} e^x, & x \geq 0, \\ x, & x < 0. \end{cases}$ ,  $g(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x=0. \end{cases}$

- 下述命题成立的是 ( )

(A)  $f(x)$  在  $[-1, 1]$  上存在原函数.

(B) 存在  $g'(0)$ .

(C)  $g(x)$  在  $[-1, 1]$  上存在原函数.



(D)  $F(x) = \int_{-1}^x f(t) dt$  在  $x=0$  处可导.

- (6) 设  $F(u, v)$  具有一阶连续偏导数, 且  $z=z(x, y)$  由方程  $F\left(\frac{x}{z}, yz\right)=0$  所确定. 又设题中出现的分母不为零, 则  $x \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial y} =$  ( )
- (A) 0. (B)  $z$ . (C)  $\frac{1}{z}$ . (D) 1.

- (7) 设  $A$  是 3 阶非零矩阵, 满足  $A^2=A$ , 且  $A \neq E$ , 则必有 ( )

- (A)  $r(A)=1$ .  
(B)  $r(A-E)=2$ .  
(C)  $[r(A)-1][r(A-E)-2]=0$ .  
(D)  $[r(A)-1][r(A-E)-1]=0$ .

- (8) 设  $A, B$  是  $n$  阶可逆阵, 且  $A \sim B$ , 则

- ①  $A^{-1} \sim B^{-1}$ . ②  $A^T \sim B^T$ . ③  $A^* \sim B^*$ . ④  $AB \sim BA$ .

- 其中正确的项数是 ( )

- (A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 4.

**二、填空题:** 9~14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分. 请将答案写在答题纸指定位置上.

(9)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{2-\sin x - \cos x}{1+x} \right)^{\frac{1}{\tan x}} =$  \_\_\_\_\_.

(10) 设  $f(t)$  为连续函数, 且  $\int_0^x tf(2x-t)dt = \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$ ,  $f(1) = 1$ , 则  $\int_1^2 f(x)dx =$  \_\_\_\_\_.

(11)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+2x)^{\frac{1}{x^2}}}{e^{\frac{2}{x}}} =$  \_\_\_\_\_.

(12) 微分方程  $y' + \frac{1}{x} = xe^{-y}$  的通解是  $y =$  \_\_\_\_\_.

(13) 设  $y=y(x)$  是由方程  $x^2+y=\tan(x-y)$  确定的函数, 且满足  $y(0)=0$ . 则  $y''(0)=$  \_\_\_\_\_.

(14) 设  $\xi_1=[1, 3, -2]^T$ ,  $\xi_2=[2, -1, 3]^T$  是  $Ax=0$  的基础解系,  $Bx=0$  和  $Ax=0$  是同解方程组,  $\eta=[2, a, b]^T$  是方程组  $\begin{cases} Bx=0, \\ x_1+2x_2+x_3=-2 \end{cases}$  的解, 则  $\eta =$  \_\_\_\_\_.

**三、解答题:** 15~23 小题, 共 94 分. 请将解答写在答题纸指定位置上, 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15)(本题满分 10 分)

设  $0 < x < 1$ ,  $f(x) = \int_0^{+\infty} x^t dt$ .

(I) 试用初等函数表示  $f(x)$ ;

(II) 设  $\lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x)^p \int_0^{+\infty} x^t dt$  存在且不为零, 求常数  $p$  的值及上述极限.

(16)(本题满分 10 分)

设  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  上有界, 且存在二阶导数. 试证明: 至少存在一点  $\xi \in (-\infty, +\infty)$  使  $f''(\xi)=0$ .

密  
封  
线  
内  
不  
要  
答  
题

(17)(本题满分 10 分)

设  $f(x)$  在  $[0, 1]$  上可导, 且满足  $f(1) = 4 \int_0^{\frac{1}{4}} x^3 f(x) dx$ . 试证明: 存在  $\xi \in (0, 1)$ , 使  $f'(\xi) = -\frac{3f(\xi)}{\xi}$ .

(18)(本题满分 10 分)

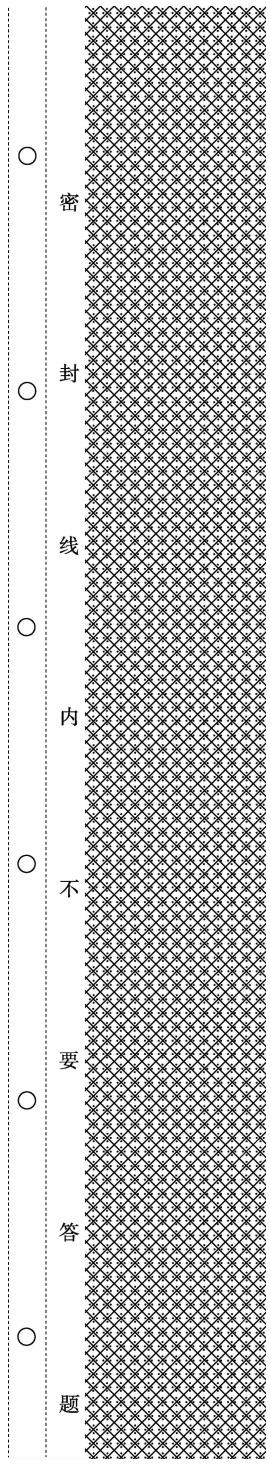
适当选取函数  $\varphi(x)$ , 作变量代换  $y = \varphi(x)u$ , 将  $y$  关于  $x$  的微分方程  $\frac{d^2y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + \left(\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}\right)y = 0$  化为  $u$  关于  $x$  的二阶常系数线性齐次微分方程  $\frac{d^2u}{dx^2} + \lambda u = 0$ . 求  $\varphi(x)$  及  $\lambda$ , 并求原方程的通解.

(19)(本题满分 10 分)

设  $f(x, y) = \max\{\sqrt{x^2 + y^2}, 1\}$ ,  $D = \{(x, y) \mid |x| \leq y \leq 1\}$ . 求  $\iint_D f(x, y) d\sigma$ .

(20)(本题满分 11 分)

求由方程  $2x^2 + 2y^2 + z^2 + 8xz - z + 8 = 0$  所确定的函数  $z(x, y)$  的极值.



(21)(本题满分 11 分)

(I) 设圆盘的半径为  $R$ , 厚为  $h$ . 点密度为该点到与圆盘垂直的圆盘中心轴的距离平方, 求该圆盘的质量  $m$ .

(II) 将以曲线  $y=\sqrt{x}$ ,  $x=1$ ,  $x=4$  及  $x$  轴围成的曲边梯形绕  $x$  轴旋转一周生成的旋转体记为  $V$ , 设  $V$  的点密度为该点到旋转轴的距离的平方, 求该物体的质量  $M$ .

(22)(本题满分 11 分)

已知  $\eta$  是  $Ax=b$  的一个特解,  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-r}$  是对应齐次方程组  $Ax=0$  的基础解系, 证明:

- (I)  $\eta, \eta+\xi_1, \eta+\xi_2, \dots, \eta+\xi_{n-r}$  是  $Ax=b$  的  $n-r+1$  个线性无关解;  
(II) 方程组  $Ax=b$  的任一解均可由  $\eta, \eta+\xi_1, \dots, \eta+\xi_{n-r}$  线性表出.

(23)(本题满分 11 分)

设 3 阶矩阵  $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & t \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ ,  $C = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ .

- (I)  $t$  为何值时, 矩阵  $A, B$  等价? 说明理由.  
(II)  $t$  为何值时, 矩阵  $A, C$  相似? 说明理由.